数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 1-13

A GEOMETRIC PROOF OF SELBERG'S LEMMA FOR FUCHSIAN GROUPS

須川 敏幸　京都大学・理学部
TOSHIYUKI SUGAWA

1. 序

この小文では次の有名な Selberg の補題を Fuchs 群の場合に限って幾何学的な証明を与えることと、指数についての具体的な評価を与えることを目標とする。

定理 1 (Selberg の補題 [22]). K **を標数** 0 **の体とする時、**$\mathrm{GL}(n, K)$ **の有限生成部分群は** torsion-free **かつ指数有限な部分群を含む。**

少し歴史的なことも含めて解説をしておこう。W. Fenchel は「有限生成 Fuchs 群はつねに有限位数の torsion-free 部分群を持つか？」という問題を提出した。この問題は S. Bundgaard-J. Nielsen [5] 及び R. Fox [12] によって完全に肯定的に解決された。その後 Mennicke [21] が三角群の場合に帰着させることにより簡単な別証明を与えている。それとは別の流れで（高次元の）線型群に関する Minkowski の結果や Burnside の定理などの一般化として上記の Selberg の補題が証明された。なお、比較的易しい代数的な証明としては [2] を参照されたい。日本語の文献では谷口-松崎 [23] に比較的平易な解説がある。我々がこの結果を使うのは主に $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$（ここに $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）の有限生成離散部分群についてであるが、応用上も理論上もしばしばその torsion-free な部分群（または正規部分群）の指数がどの程度に取れるかが重要になる。しかし、上記の定理の代数的証明は非常に抽象的であり具体的な指数の評価を与えてくれるものではない。そこで幾何学的にこの定理を証明することによりその指数の評価をしようというのが本稿の目論見である。(Fox や Mennicke の証明は幾何学的ではあるが、やはり具体的な評価が与えられているわけではない。)

Selberg の補題を Klein 群の場合に示し、なおかつ指数に関する評価を与えることがより重要であると思われるが、それは難しいので今回は Fuchs 群の場合に限ることにする。(Fuchs 群の場合は torsion 元は必ず分岐点を represent するというのが議論が簡明になる一つの理由である。) ただ、ここに述べた方法のある部分は Klein 群の証明を考える際にもアイデアを与えるであろうと期待される。

ここで述べる幾何学的方法は実は [15] にかなりの部分書かれていたことを数理解析研究所での講演直前になって気づいた。また考えていたいくつかのアイデアもその後の調査で既知のものであることが分かった。しかし、それらのアイデアがまとめて書かれている文献は見あたらないようなので、本稿で出来るだけ関連する結果やアイデアを述べ、その出所を明らかにすることは無益ではないであろうと思われる。なお、本稿のセールスポイントが一つあるとすれば、それは Fuchs 群が無限生成であっても適用可能な点であろう。

それは幾何学的なアプローチによる有利な点の一つである。(もちろん、代数的な証明も可能だが、無限種数で境界成分が非可算無限個のリーマン面の基本群の生成元など書き下すことは不可能ではないがそれだけで結構面倒であり、適用が難しくなる。)

2. 定義と用語のまとめ及び主結果

Γ を上半平面 $\mathbb{H}$ に作用する(有限生成とは限らない)Fuchs 群(つまり $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の離散部分群)とすると上半平面 $\mathbb{H}$ の Γ による商 $X = X_\Gamma$ は自然に orbifold の構造を持つ。これを説明しておこう。まず商空間 $\mathbb{H}/\Gamma$ は自然にリーマン面の構造(non-singular な複素構造)を持つことはよく知られている通りである。これを $R = R_X$ と書くことにする。任意の $x \in R$ に対して $p(a) = x$ となる $a \in \mathbb{H}$ をとれば a における Γ の固定群は自明であるかまたは楕円型の元で生成された有限巡回群となる。この位数は a の取り方によらないので $I_\Gamma(x) = \mathrm{Ind}_X(x)$ と書くことにし x における X の分岐指数と呼ぶことにする。$\mathrm{Ind}_X(x) > 1$ なる点 x を X の分岐点と呼び、分岐点を除いた面を X° と書くことにする。(定義から明らかに $I_\Gamma \equiv 1$ であることは Γ が torsion-free であることにほかならない。この場合は X は自然に underlying Riemann surface R_X と同一視できる。)このようなリーマン面 R とその上の自然数値函数 I で $I > 1$ なる点が離散的閉集合となるようなものの組 $X = (R, I)$ を (hyperbolic 2-)orbifold と呼ぶ。先に X が与えられた場合は対応する R, I をそれぞれ R_X, Ind_X と書くことにする。

orbifold X, Y に対して $p : Y \to X$ が(不分岐)被覆であるとは $p : R_Y \to R_X$ が analytic な分岐被覆であり $y \in R_Y$ に対して $B_p(y)$ を p の y における局所次数 (local degree) とすれば $\mathrm{Ind}_X(p(y)) = \mathrm{Ind}_Y(y) \cdot B_p(y)$ が任意の $y \in R_Y$ について成り立つことを言う。特に Y が(orbifold として)上半平面(または単位円板)の時このような p は orbifold X の一意化写像と呼ぶ。

また $X = X_\Gamma$ には $p : \mathbb{H} \to X$ を自然射影として $p^*(\rho_X) = |dz|/2\mathrm{Im}z$ を満たす計量 $\rho_X = \rho_X(z)|dz|$ が一意的に入るがそれを X の Poincaré 計量または双曲計量と呼ぶ。(分岐点においては特異性を持つが距離を定義する上では影響がない程度の特異性であることに注意しておく。)それに関する X の面積 $\mathrm{Area}(X)$ は良く知られているように Γ が第 2 種の場合には無限大であり第 1 種の場合は

$$\mathrm{Area}(X) = \frac{\pi}{2}\left(2g - 2 + n + \sum_{x \in R_X}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Ind}_X(x)}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}\chi(\Gamma) \tag{2.1}$$

となる。ただしここに g は R_X の種数とし n は R_X の puncture の個数とする。また、$\chi(\Gamma) = -2g + 2 - n - m - \sum_x(1 - 1/I_\Gamma(x))$ は Γ の Euler 数を表す。(これはもちろん位相的に定義されるそれの一般化である。)

この値はもちろん正であるが抽象的に定義された orbifold $X = (R, I)$ に対して上半平面からの一意化写像が存在するための必要十分条件が「R が解析的有限でないか、または(2.1) の右辺で定義される量が正である」ということが知られている([20] Appendix 参照)。

また、$\Gamma_1 < \Gamma$ で Γ_1 が有限生成かつ第 1 種とすると自然に被覆写像 $\mathbb{H}/\Gamma_1 \to \mathbb{H}/\Gamma$ を得るが双曲計量の不変性から $\mathrm{Area}(X_{\Gamma_1}) = [\Gamma : \Gamma_1]\mathrm{Area}(X_\Gamma)$ を得る。仮定から X_{Γ_1} の双曲

面積は有限となるので特に

$$\chi(\Gamma_1) = [\Gamma : \Gamma_1]\chi(\Gamma) \tag{2.2}$$

を得る。これは通常 Riemann-Hurwitz の公式としてよく知られているものであり、例えばこれによって下の面の種数などのデータから、上の面の種数が計算出来る。実はこの式自体は Γ_1 と Γ の極限集合が等しい限りこれらが第 2 種であっても成り立つことが Schottky double を考えることにより容易に分かる（例えば Maclachlan [18] を参照のこと）。特に $\Gamma_1 \lhd \Gamma$ あるいは $[\Gamma : \Gamma_1] < \infty$ である限り常に満たされる。

Fuchs 群 Γ に対して $(g; \nu_1, \nu_2, \dots; n; m)$ を Γ の signature と呼ぶ。ここに g, n, m はそれぞれ R_{X_Γ} の種数、puncture の個数、hole（moduls が有限な円環であるような end）の個数とし、$\nu_1, \nu_2, \dots$ は $I_\Gamma(x) > 1$ となるような x について値 $I_\Gamma(x)$ を重複も許して並べたものとする。特に $\nu_1, \nu_2, \dots$ を Γ の分岐データと呼び、$X = \mathbb{H}/\Gamma$ の分岐点の個数を k としてそれを Γ の分岐データの個数と呼ぶことにする。g, k, n, m は無限大または 0 の値も許すものとする。$m > 0$ ならば Γ は第 2 種であることに注意しておこう。$m = 0$ であっても g, k または n が無限大ならば Γ が第 2 種であることはあり得る。なお、Γ が有限生成ならばよく知られているように $g + k + n + m < \infty$ である。

Fuchs 群 Γ について次の量を考える。

$$\alpha(\Gamma) = \min\{[\Gamma : \Gamma_0]; \Gamma_0 < \Gamma : \text{ torsion-free}\}$$
$$\beta(\Gamma) = \min\{[\Gamma : \Gamma_0]; \Gamma_0 \lhd \Gamma : \text{ torsion-free}\}$$

空集合の min は ∞ と約束しておく。$\Gamma_0 < \Gamma$ あるいは $\Gamma_0 \lhd \Gamma$ ならば $[\Gamma : \Gamma_0]$ はそれぞれ $\alpha(\Gamma)$ または $\beta(\Gamma)$ の約数であろうと思われるがこれは群論の一般論からただちには結論できない。ただ、少なくとも分岐位数の最小公倍数が $\alpha(\Gamma), \beta(\Gamma)$ の約数であることは容易に分かる。

まず $\alpha(\Gamma)$ については次の結果が究極的であろう。

定理 2 (Edmonds-Ewing-Kulkarni [9]). Γ **を** $(g; \nu_1, \cdots, \nu_k; n; m)$ **を** signature **に持つ有限生成** Fuchs **群とする。自然数** N **に対して** Γ **の** torsion-free **な部分群で指数** N **のものが存在するための必要十分条件は** N **が** $2^\varepsilon \nu$ **で割り切れることである。従って特に** $\alpha(\Gamma) = 2^\varepsilon \nu$ **が成り立つ。ここに** $\nu = \mathrm{LCM}(\nu_1, \cdots, \nu_k)$ **で、**ε **は** $n + m = 0$ **かつ** ν **が偶数だが** ν/ν_j **が奇数になるような** j **は奇数個であるときには値** 1 **を取りそれ以外の場合には値** 0 **とする。**

（上の定理で $\varepsilon = 1$ なる場合を**奇数型**と呼ぶことにする。）

これは最良の結果であるが $\beta(\Gamma)$ に関してはそれほど良い情報を与えてくれるわけではない。一応、一般論を述べておくと、H を群 G の有限指数 n を持つ部分群とすると H に含まれる最大の G の正規部分群

$$H_1 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

は $[G:H_1] \leq n!$ を満たす。従って少なくとも上の定理の系として我々は $\beta(\Gamma) \leq (2^{\varepsilon}\nu)!$ を得るがこれは良い評価であるとは期待できない。一方、やはり上の定理から Γ が有限生成ならば $\beta(\Gamma)$ は必ず $\alpha(\Gamma)$ によって割り切れることにも注意しておく。

実際には $\beta(\Gamma)$ の値は少なくとも $g+n+m>0$ の場合には $\alpha(\Gamma)$ とそれほど変わらないことが容易に分かる（定理 3 主張 3.）。しかしそうでない場合には $\beta(\Gamma)$ がどれくらいになるかは数論的あるいは群論（特に有限単純群論）的な深い問題とも関係しており一般には難しいようである（[16] 参照）。また、正規部分群についてはリーマン面の自己同型群の問題とも密接に関係しており微妙な問題が出てくるであろうことは想像に難くない。本稿ではこの部分に関しては Feuer [11] 及び河野 [15] を参考にした代数的な方法について述べておく。いずれにしても、以下に述べる方法によって示される結果を次にまとめておく。

定理 3. Γ **を** $(g;\nu_1,\nu_2,\cdots;n;m)$ **を** signature **とする任意の** Fuchs **群し、対応する** orbifold **を** $X=\mathbb{H}/\Gamma$ **とする。また** $\nu=\mathrm{LCM}(\nu_1,\nu_2,\cdots)$ **とし、これが有限であると仮定する。**

1. **分岐データが** $\nu_1,\nu_1,\nu_2,\nu_2,\cdots$ **のような 2 つずつペアになっているような形をしている時は** torsion-free **な正規部分群** Γ_1 **で** $\Gamma/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z}_\nu$ **となるものが取れる。従ってこの場合は** $\beta(\Gamma)=\nu$ **が成り立つ。**
2. $g>0$ **または** $g=0$ **だが** R_X **が単連結でないときは** $\beta(\Gamma) \leq 2\nu^2$.
3. Γ **が有限生成で** $g+n+m>0$ **とする。** $n+m>0$ **の時は** $\beta(\Gamma)=\nu$ **であり** $n+m=0$ **の場合は** $\beta(\Gamma) \leq 2^{\varepsilon+1}\nu$ **が成り立つ。ここに** ε **は** Γ **が奇数型の時** 1 **でそうでないときは** 0 **を表すものとする。**
4. R_X **がリーマン球面と同相の時、** p **を** ν **を割り切らない任意の素数とし、** $(\mathbb{Z}_\nu)^\times$ **における** $p \mod \nu$ **の位数を** t **として** $q=p^t$ **とおく。このとき** torsion-free **な正規部分群** Γ_1 **で** Γ/Γ_1 **が** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ **の部分群に同型であるようなものが存在する。従って特に** $\beta(\Gamma) \leq \#\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)=q(q^2-1)$ **が成り立つ。**

上記の 3. の主張はおそらく well known であろう。例えば、[9] の §3 の Remark に同様の記述が見られる。最後のケースが最も難しいといえるが本質的に難しいのは三角群と呼ばれている群の正規部分群を求めることである。有限単純群と密接な関係があることなどから多くの人によって調べられている。たとえば [1], [4], [7], [8], [10], [19], [24] などを参照されたい。また三角群は数体上の（複素）代数曲線の関係でも重要なことが Belyi [3] によって示された。三角群と Grothendieck の dessins enfants や三角形ビリヤード問題との関係については [6] を参照のこと。

以下ではまず 3 節において主張 1. の幾何学的証明を与える。4 節において次の主張 2. を示すが実際にはもう少し多様な場合についても同様の主張を示す。証明には一部代数的な議論があるので、純粋に幾何学的な証明とは言えないかもしれない。5 節において主張 3. 及び 4. の証明を与える。ここでは極めて代数的な議論を行うが、グラフ（いわゆる fat graph あるいは ribbon graph）を考えることによって実際にはある程度の幾何学化が可能ではあるが、詳細についてはここでは省略し別の機会に紹介できればと思っている。グラフを用いた議論は多くの研究者が行っているが、例えば [14] などを参照して頂きたい。

3. 幾何学的方法

ここでは幾何学的方法による分岐特異点解消のプロセスについて説明する。それによって定理3の主張1.の証明が得られる。

このプロセスの最も単純なモデルは$p_n(z)=z^n$によって定義されるリーマン球面のn重被覆写像$p_n:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$であろう。これは$0,\infty$にのみ指数$n$の分岐を持つ$\widehat{\mathbb{C}}$をunderlying surfaceとするorbifold Xの一意化写像ともみなせる。実はこの操作はある意味で局所化できる。これはよく知られている「切り貼り」の議論であるが、後のために少し説明しておこう。まず0と∞を結ぶ滑らかな閉Jordan弧でXを切り開く。このようなもののコピーをn枚用意して巡回的にsheetを貼り合わせていってできあがったものがXの特異点を解消した被覆面であり、今の場合はそれが再びリーマン球面$\widehat{\mathbb{C}}$になっているわけである。このような構成は一般の面でも適用可能である。すなわち、orbifold Xに同じ分岐指数nを持つ相異なる分岐点p,qがあったとき、その2点を結ぶX°内の滑らかな閉Jordan弧（例えば測地線分）を選んで、それに沿って面を切り開いたもののコピーをn枚用意してそれを同様に巡回的に貼り合わせればその分岐を解消した被覆写像が構成できる。

分岐点がその2点だけなら良いが、そうでなければ他の分岐点は分岐の葉数に応じて増えてしまうことになる。従って、「同時分岐点解消」とも言うべき操作を行えばうまくいくのではないかと考えられる。実際そうであることを説明しよう。

定理3の主張1.の仮定が成り立っているとする。つまりXの相異なる分岐点の列（無限列でもよい）a_j,b_j $(1\le j<k+1)$があって、$\mathrm{Ind}_X(a_j)=\mathrm{Ind}_X(b_j)=\nu_j$が成り立っているとする。そこでまず$a_j$から$b_j$に至る向きづけられた$X^\circ$内の滑らかな閉Jordan弧$\gamma_j$の列で互いに交わらないものを取っておく。（このようなことが可能なのは容易に分かる。）そこでこれらの曲線に沿って切り開いた境界付きリーマン面R'の$\nu=\mathrm{LCM}(\nu_1,\nu_2,\ldots)$個のコピー$R'_t$ $(t\in\mathbb{Z}_\nu)$を用意する。R'_tの境界でγ_jの左岸、右岸に対応する部分をそれぞれ$\gamma^+_{j,t},\gamma^-_{j,t}$と書くことにする。$\nu=\mu_j\nu_j$として$\gamma^+_{j,t}$と$\gamma^-_{j,t+\mu_j}$とを自然に同一視することによって$\coprod_t R'_t$に同値関係を定義することが出来、それで割った空間を$\tilde{R}$とする。すると$\tilde{R}$は連結となり、これには標準的な複素構造を入れることが出来て自然な射影$p:\tilde{R}\to R=R_X$はリーマン面$\tilde{R}$からorbifold Xへの被覆になっていることが容易に分かる。つまり各a_j,b_jはpの指数ν_jの分岐点の像となっている。しかも、この被覆は正規（Galois）になっている。実際、sheetを1枚ずらす写像$R'_t\to R'_{t+1}$は先の同一視とcompatibleになっているので、これは双正則写像$\sigma:\tilde{R}\to\tilde{R}$で$p\circ\sigma=p$を満たすもの（つまり$\sigma$は$p:\tilde{R}\to R$の被覆変換）を誘導する。従って特に$p:\tilde{R}\to R$の被覆変換群はfibreにtransitiveに作用している、すなわちpはGalois被覆であり、その被覆変換群は$\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_\nu$である。

参考のために$\tilde{R}$の種数の計算方法について述べておこう。一般にはこの種数は非常に高くなることが以下のことから分かる。$R=R_X$の位相型が有限でなければいきなり計算は出来ないのでまず適当な近似(exhaustion)を行うことが必要になる。その際、近似する時に使う相対コンパクトな部分領域$R_0\Subset R$としては相対境界∂R_0がγ_jに触れないような有限個（今はN個とする）のJordan閉曲線からなるようにしておくと計算が楽になる。このようなR_0に含まれる分岐点を$a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{k_0},b_{k_0}$として$\nu=\mathrm{LCM}(\nu_1,\ldots,\nu_{k_0})$であるように十分たくさんの分岐点が含まれているとする。すると$\tilde{R}_0:=p^{-1}(R_0)$が連結にな

り、この相対境界の成分の個数は νN 個であることが被覆の構成の仕方から容易に分かる。R_0 の種数を g_0 とし $\tilde{R}_0$ の種数を $\tilde{g}_0$ とすると Riemann-Hurwitz の公式から（Maclachlan の結果を用いるか、あるいは直接 double を考えればよい）、次の式を得る：

$$2\tilde{g}_0 - 2 - \nu N = \nu\left(2g_0 - 2 + 2\sum_{j=1}^{k_0}\left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) + N\right).$$

これより

$$\tilde{g}_0 = \nu\left(g_0 - 1 + \sum_{j=1}^{k_0}\left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right)\right) + 1.$$

を得る。この右辺の上限を取ったものが $\tilde{R}$ の種数である。特に分岐データの個数 k が無限個の場合は種数は無限大となる。

4. 幾何学的方法の応用

前節では分岐データに非常に強い制約のある場合についてのみ非常に良い分岐点解消の被覆写像が構成できたことを見た。この節では実は上の状況が比較的容易に作り出せることを見て、それを用いて定理 3 の 2. の主張を示す。

前節の結果は分岐点が 2 つずつペアとなって現れていなければならなかったが、そのような状況は容易に分かるように orbifold の不分岐な 2 重被覆 $q : \hat{X} \to X$ で $q : R_{\hat{X}} \to R_X$ 自体が不分岐なものを作れば $\hat{X}$ について実現できる。従って、さらにこの $\hat{X}$ の分岐点解消被覆写像 $p : \tilde{X} \to \hat{X}$ を作れば最終的に X の分岐点解消被覆写像 $q \circ p$ を得る。しかし、p, q ともに Galois であってももちろんその合成写像が Galois かどうかは分からない。以下では (1) このような 2 重被覆の存在, 及び (2) $q \circ p$ から構成される Galois 被覆の葉数の評価，の 2 点について論じる。以下の方法はかなりの部分が幾何学的であるので面の位相型についての条件はほとんど必要ない。（必要なのは全ての分岐指数の最小公倍数が有限であることのみである。）しかし、その分だけ評価があまり良くない。より良い評価のためには次節で説明する代数的方法が有効である。そちらも参照して頂きたい。

まず orbifold としての不分岐 2 葉被覆 $q : \hat{X} \to X$ で $\hat{X}$ が前節の条件を満たすようなものが存在するための十分条件について考える。（もちろん、これらによって全ての場合がカバーされるわけではない。）

(a) $R = R_X$ **が単連結でない時**. この場合は容易に構成できる。アイデアとしては例えば種数が正であればハンドルが取れるが、ハンドルを切るような解析的 Jordan 閉曲線を取って、そこで切り開いた面のコピーを 2 枚用意して互い違いに貼り合わせればよい。もし種数が 0 ならば函数論で知られているように R はリーマン球面に埋め込むことができる。今は仮定から R は単連結ではないのでさらに $R \subset \mathbb{C}^* = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ としてもよい。すると $\hat{X}$ としては写像 $z \mapsto z^2$ によって X を引き戻したものを考えればよい。

この大雑把な説明で不安な方のためにもう少し形式的な被覆の構成法を述べておこう。R の基本群からホモロジー群への標準射影 $\pi_1(R, *) \to H_1(R, \mathbb{Z})$ を考える。よく知られているように $H_1(R, \mathbb{Z})$ は自由アーベル群であり（R の位相型が無限大の場合は適当に解釈

する)、仮定から自明ではない。従って、特に全射準同型 $H_1(R,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ が存在する。さらに射影 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ を考えて、これら全てを合成すれば全射準同型写像 $\pi_1(R,*) \to \mathbb{Z}_2$ が得られる。そこでこの核 (kernel) を K として R のリーマン面としての普遍被覆面を K の作用で割ったものを $\hat{R}$ として自然射影 $q : \hat{R} \to R$ とすればこれが自然に orbifold の不分岐被覆写像 $q : \hat{X} \to X$ を誘導する（ここに $\hat{X}$ は q によって X の orbifold 構造を $\hat{R}$ に引き戻して得られたものである)。

(b) R **が単連結で、ある点** $x, y \in X$ **で** $\mathrm{Ind}_X(x) = \mathrm{Ind}_X(y)$ **が偶数となるものがある時.** この場合は前節と同様に x, y を結ぶ X° 内のなめらかな閉 Jordan 弧で X を切り開いたもののコピーを 2 枚用意して、それを crosswise につないで被覆 $q : \hat{X} \to X$ を作る。この場合は得られた orbifold $\hat{X}$ は x, y 以外の分岐点の逆像は同じ位数を持つ 2 点に分かれて、x, y の逆像は 1 点のみで指数は元の半分になっている。指数を効率的に減らすためには同じようなペアが他にもある場合には前節と同様に「同時分岐点解消」の方法を用いてやればよい。

(c) $R = R_X$ **が非コンパクト単連結リーマン面で、**X **が偶数位数の分岐点を持つとき.** (a) で述べたように R が単連結だからリーマン球面に埋め込めるが、この場合は特に複素平面 $\mathbb{C}$ に埋め込める。そのようにしておいて、さらに X の偶数位数の分岐点を一つ取り、それが原点であると仮定してもよい。するとこの場合は $z \mapsto z^2$ で引き戻した orbifold を $\hat{X}$ とすればよい。(この場合原点の逆像の分岐指数は元の指数の半分になっている。)

次に orbifold としての不分岐 2 葉被覆 $q : \hat{X} \to X$ と ν 葉不分岐 Galois 被覆 $p : \tilde{X} \to \hat{X}$ が与えられている時にこれらから構成される X の不分岐 Galois 被覆の葉数の評価について考える。まず、q は 2 葉の被覆だから自動的に Galois になっていることに注意する。(これは sheet を入れ替える写像が分岐点にまで正則に延びることを見てやればよい。) さて $\tilde{X}$ は双曲的だから上半平面からの orbifold としての一意化写像 $\pi : \mathbb{H} \to \tilde{X}$ が存在する。この被覆変換群を $\tilde{\varGamma}$ としておこう。すると $p \circ \pi, q \circ p \circ \pi$ はそれぞれ $\hat{X}, X$ の一意化写像となっている。必要なら適当な Möbius 変換で動かすことにより最初から $q \circ p \circ \pi$ の被覆変換群が元々与えられている Fuchs 群 $\varGamma$ であるとしてよい。$p \circ \pi$ の被覆変換群を $\hat{\varGamma}$ とする。すると作り方から $\tilde{\varGamma} \lhd \hat{\varGamma} \lhd \varGamma$ である。しかし群論の一般論が教えるように $\tilde{\varGamma} \lhd \varGamma$ であるとは限らない。そこで N を $\tilde{\varGamma}$ に含まれる最大の $\varGamma$ の正規部分群とする。すると次の補題から実は $[\varGamma : N] \leq 2\nu^2$ であることが分かる。(より詳しくは $[\varGamma : N]$ は $2\nu^2$ の約数である。)

補題 4. H, K **を群** G **の部分群として** $[G : H] = 2, K \lhd H, [H : K] = n < \infty$ **とすると** K **に含まれる** G **の最大の正規部分群** N **に対してその指数** $[G : N]$ **は** $2n$ **を約数にもち、**$2n^2$ **の約数となる。特に** $[G : N] \leq 2n^2$ **が成り立つ。**

証明. まず剰余類分解により $G = H \cup \sigma H, H = h_1 K \cup \cdots \cup h_n K$ と表しておく。ただしここで $h_1 = 1$ に取っておく。するともちろん $G = h_1 K \cup \cdots \cup h_n K \cup \sigma h_1 K \cup \cdots \cup \sigma h_n K$ と書くことが出来る。そこで G の剰余類集合 G/K への transitive な作用を $g \cdot g'K := gg'K$

によって定めるとこれは G/K の置換を引き起こす。これにより G/K の置換群への準同型写像 $\rho : G \to S(G/K) \cong S_{2n}$ を得る。(ρ は通常，置換表現と呼ばれる。) 定義から明らかに $N = \cap_{g\in G} gKg^{-1} = \mathrm{Ker}(\rho)$ である。このことから直ちに $[G : N] = \#\rho(G) \leq \#S_{2n} = (2n)!$ を得るが，初期の評価を得るにはもう少し解析が必要である。まず K の固定群 $G_1 := \{g \in G; \rho(g)(K) = K\}$ を考える。定義からこれは K 自身に他ならない。$G_1 = K$ はもちろん $G/K \setminus \{K\}$ に作用するが、実際には $K \lhd H$ であるからさらに H/K には自明に作用する。従って実は n 個のシンボル $\sigma H/K = \sigma h_1 K \cup \cdots \cup \sigma h_n K$ の上に K が作用している。そこでさらに K の元で $\sigma h_j K$ の固定群 $K_j = \{k \in K; \rho(k)(\sigma h_j K) = \sigma h_j K\}$ を考えると，任意の $k \in K_j$ に対して $k' = (\sigma h_j)^{-1} k \sigma h_j \in K$ だから任意の $h \in H$ に対して

$$\rho(k)(\sigma h_j hK) = k\sigma h_j hK = \sigma h_j k' hK = \sigma h_j h(h^{-1}k'h)K = \sigma h_j hK$$

が成り立つ。つまり K_j の元は $\sigma H/K$ の元を全て固定する。一方 $N \subset K_j$ は定義から明らかだから $K_j = N$ であることが分かった。従って $[K : K_j] = [K : N]$ は K の作用に関する $\sigma h_j K$ の軌道の個数に等しくこれらは全て j によらず等しいことが分かった。一方これらの軌道によって $\sigma H/K$ が分解されるわけだから、結局 $[K : N] = [K : K_j]$ が $n = \#\sigma H/K$ を割り切ることが分かった。$[G : N] = [G : K][G : N] = 2n[G : N]$ であるからこれより主張が示された。 $\square$

5. 代数的方法

ここでは簡単のために有限生成 Fuchs 群のみを考える。すなわち Fuchs 群 Γ の signature を $(g; \nu_1, \ldots, \nu_k; n; m)$ として $g + k + n + m < \infty$ とする。するとこのとき Γ の生成元と関係式が次のように完全に書き下せることが知られている:

生成元：$a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, e_1, \ldots, e_k, c_1, \ldots, c_{n+m}$.

関係式：

(5.1)
$$[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] e_1 \ldots e_k c_1 \ldots c_{n+m} = 1,$$
$$e_j{}^{\nu_j} = 1 \quad (j = 1, \ldots, k).$$

ここで a_i, b_i は双曲型元で $[a, b]$ は交換子積 $aba^{-1}b^{-1}$ を表すものとする。また、e_j は楕円型、$c_1, \ldots, c_n$ は放物型元で $c_{n+1}, \ldots c_{n+m}$ は双曲型元である。ここでは代数的な議論しか行わないので、pucture と hole に対応する元を区別する必要はないので同じ文字を用いることにした。双曲型元 e_j はそれぞれ位数 ν_j を持った別々の分岐点を表し、逆に任意の分岐点はどれかの e_j に対応している。このことは Γ の任意の楕円型元がある e_j のべきに Γ において共役であることを意味している。ゆえに任意の torsion-free な指数有限な Γ の正規部分群 N に対して標準射影 $f : \Gamma \to \Gamma/N$ は仮定から各 $\langle e_j \rangle$ に制限すれば単射でなければならないが、逆にある群への準同型写像 $f : \Gamma \to G$ がこの性質を満たせば $N = \mathrm{Ker} f$ は torsion-free となる。$\langle e_j \rangle$ 上で単射という条件はすなわち $f(e_j)$ の位数がちょうど ν_j になることと同値である。従って torsion-free な指数有限正規部分群を求めることは、有限群 G への全射準同型 $f : \Gamma \to G$ で

(5.2)
$$\mathrm{ord}(f(e_j)) = \mathrm{ord}(e_j) (= \nu_j) \quad (j = 1, \ldots, k)$$

を満たすようなものを求めることに完全に対応している。なお、この場合準同型定理から $[\Gamma : N] = \#G$ $(N = \mathrm{Ker} f)$ となっていることに注意しておく。

では、以下では具体的にこのような準同型写像で G の位数が出来るだけ小さいものを構成することを考える。例えば易しいものではアーベル群、それでうまくいかなければよく調べられている非可換有限群を用いることを考えればよい。それ以外での候補はもともと Γ が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の部分群であったことから、それの reduction を取ることにより例えば有限体 $\mathbb{F}_q$ を用いて $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ または $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_q)$ が取れるのではないかと期待されるが実際そうであることを以下でみる。万能なのは対称群への埋め込みであるが、やみくもにやってみて簡単に位数の小さいものが構成できるものではなく、これは最後の手段とすべきであろう。なお、他にも例外的に $\mathrm{SL}(d,\mathbb{F}_q)$ という高次元の（有限）線型群に埋め込める場合や、例外型単純群に埋め込める場合など色々知られているようである。

簡単な順に片づけていこう。以下では ν を $\nu_1,\ldots,\nu_k$ の最小公倍数とし、$\mu_j = \nu/\nu_j$ と置く。また、$\mathbb{Z}_s$ は位数 s の有限巡回群 $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ を表すものとする。

(A) $n+m>0$ **である場合**. この場合は簡単で、次のように準同型 $f : \Gamma \to \mathbb{Z}_\nu$ で(5.2)を満たすようなものを構成出来る。

$$f(e_j) = \mu_j \ (j=1,\ldots,k), f(c_1) = -(\mu_1 + \cdots + \mu_k)$$

としてこれ以外の生成元については全て0を対応させるとこれは関係式を保存するので準同型を定める。従って、この場合は $\beta(\Gamma) = \alpha(\Gamma) = \nu$ である。

(B) $n+m=0, g>0$ **である場合**. この場合はもう少し複雑である。少なくとも G を可換群に選ぶと必然的に関係式(5.1) を G に落とせば交換子の部分は消えてしまうので分岐データに特殊な条件（例えば後述のように LCM 条件など）がなければこのような準同型は存在しないことが分かる。そこで、最も扱いやすい非可換群として二面体群 D_s を考える。これは $\mathbb{Z}_2 = \langle\sigma\rangle$ の $\mathbb{Z}_s = \langle x\rangle$ への非自明な唯一の作用 $(x,\sigma) \mapsto x^\sigma = x^{-1}$ に関して半直積を取ったものと理解すると良いだろう。つまり

$$D_s = \langle x,\sigma | x^s = \sigma^2 = 1, \sigma x \sigma^{-1} = x^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_s \rtimes \mathbb{Z}_2$$

である。特に $[x^t,\sigma] = x^{2t}$ が成り立つことに注意しておこう。このことから $\nu, \mu := \mu_1 + \cdots + \mu_k$ が偶数か奇数かで状況が変わる。

(B1) ν が奇数の時。このときは乗法群とみた $\mathbb{Z}_\nu$ の生成元 x の平方根が取れることに注意する。（つまり $x^{(\nu+1)/2}$ は2乗すると x になる。）従って、$f : \Gamma \to D_\nu$ を

$$f(e_j) = x^{\mu_j} \ (j=1,\ldots,k), f(a_1) = x^{-\mu(\nu+1)/2}, f(b_1) = \sigma,$$

その他の生成元に対しては単位元を対応させることにより定義すると f は関係式(5.1) を保つ。ゆえにこの場合は Γ の torsion-free な正規部分群 N で $\Gamma/N \cong D_\nu$ となるものが存在する。

(B2) ν, μ がともに偶数の時。このときは $f : \Gamma \to D_\nu$ を

$$f(e_j) = x^{\mu_j} \ (j=1,\ldots,k), f(a_1) = x^{-\mu/2}, f(b_1) = \sigma,$$

としてその他の生成元に対しては単位元を対応させると f は関係式(5.1) を保つ。ゆえにこの場合もやはり Γ の torsion-free な正規部分群 N で $\Gamma/N \cong D_\nu$ となるものが存在する。

(B3) ν が偶数で μ が奇数の時、つまり Γ が奇数型の時。このときは少し譲歩しなければならない。$f : \Gamma \to D_{2\nu}$ を

$$f(e_j) = x^{2\mu_j}\ (j = 1, \ldots, k), f(a_1) = x^{-\mu}, f(b_1) = \sigma,$$

で定義するとこれはやはり関係式(5.1) を保ち条件(5.2) を満たす準同型になる。従ってこの場合は Γ の torsion-free な正規部分群 N で $\Gamma/N \cong D_{2\nu}$ となるものが存在する。

以上で定理 3 の主張 3. が示された。

最後に $g + n + m = 0$ の場合を考える。この場合が最も難しいが、深い内容を含んでいて最も興味深いとも言える。ここでは有限体を係数に持つ特殊線型群を用いた構成を紹介するが、その前に状況をこの場合に限定して少し整理しておこう。

まず、この仮定の下では Fuchs 群 Γ は

$$\begin{aligned}&\langle e_1, \ldots, e_k | e_1^{\nu_1} = \cdots = e_k^{\nu_k} = e_1 \ldots e_k = 1\rangle \\ =&\langle e_1, \ldots, e_{k-1} | e_1^{\nu_1} = \cdots = e_{k-1}^{\nu_{k-1}} = (e_1 \ldots e_{k-1})^{\nu_k} = 1\rangle\end{aligned}$$

と表示される。従って、我々の目標は出来るだけ位数の小さい有限群 G で生成元 $x_1, \ldots, x_{k-1}$ を持ち、$\mathrm{ord}(x_j) = \nu_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$ かつ $\mathrm{ord}(x_1 \ldots x_{k-1}) = \nu_k$ を満たすものを構成することにある。もしこのような群が可換群で得られたとすると、算法を加法的に表すことにして $x_k = -(x_1 + \cdots + x_{k-1})$ とおけば $x_j = -\sum_{i\neq j} x_i$ だから x_j の位数 ν_j は $\mathrm{LCM}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}, \nu_{j+1}, \ldots, \nu_k)$ の約数でなければならない。任意の j についてこれが成り立つことをここでは LCM 条件と呼ぶことにすると、実はこの条件がこのような可換群が存在するための十分条件にもなっていることが分かる [17]。従って、次の結果を得る。

定理 5 (Maclachlan [17]). $(0; \nu_1, \ldots, \nu_k; 0; 0)$ **の形の** signature **を持つ** Fuchs **群** Γ **に対して** torsion-free **な正規部分群** N **で** Γ/N **が有限** Abel **群となるようなものを持つための必要十分条件は分岐データが** LCM **条件を満たすことである。**

なお上のような Abel 群で最大のものはもちろん $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ であるが、これは生成元 $\xi_1, \ldots, \xi_k$ で $\nu_j\xi_j = 0$ かつ $\xi_1 + \cdots + \xi_k = 0$ を満たすものからなる Abel 群であり従ってこれは $\mathbb{Z}_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\nu_k}$ を元 $(1, \ldots, 1)$ で生成された位数 ν の巡回部分群で割ったものに同型である。従って特に位数は $\nu_1 \ldots \nu_k/\nu$ となっている。もちろんこれは“最悪の”場合で、一般にはさらに小さいアーベル群にまで reduce することが可能であろう。

LCM 条件を満たさないような Fuchs 群についてはどの場合にも最善の結果をもたらすような万能かつ経済的な結果は知られていない。従って、ここでは $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ をモデルとして考えることにする。

まず p を素数, t を自然数として $q = p^t$ とおく。$\mathbb{F}_q$ で位数 q の有限体を表すことにする。よく知られているようにその乗法群 $\mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ は位数 $q-1$ の巡回群となる。まず群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ についての基本的な性質をまとめておく。まず特殊線型群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ は集合とし

ては

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix};a,b,c,d\in\mathbb{F}_q,ad-bc=1\right\}$$

と定義される。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ の元の個数は $q(q^2-1)$ であることに注意しておこう。

さて、今最も重要なのは元の位数であるのでそれについて考察しておこう。これについては文献 [13] に非常に良い解説があるので興味のある読者はそちらを参照されたい。まず非対角行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ の固有多項式 $x^2-(a+d)x+1$ の根を λ,λ^{-1} とする。一般にはこの根は $\mathbb{F}_q$ には入らないかもしれないが、少なくともその 2 次拡大 $\mathbb{F}_{q^2}$ には入っている。2 根が相異なるときは良く知られているように A は対角行列 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ に $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_{q^2})$ において共役である。従って、特に A の位数は固有値 λ の $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ における位数に等しいことが分かる。(もちろん、$\lambda\in\mathbb{F}_q^\times$ であるならばこれは $\mathbb{F}_q^\times$ における位数にも等しい。) 一方、2 根が等しい時、すなわち $a+d=\pm2$ の時は行列 A はある $s\in\mathbb{F}_q^\times$ に対して $\pm\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と共役になる。このような行列は良く知られているようにべきに関しては s についての加法群と同じ振る舞いをすることから、位数は $\mathbb{F}_q$ の標数 p に等しい。

行列 A のトレース $\mathrm{tr}A=a+d$ が共役で不変なことに注意すると $\mathrm{tr}A=\lambda+\lambda^{-1}$ となっている。従って特に次の主張を得る。

補題 6. 行列 $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ (ただし $A\neq\pm I$) が $\lambda\in\mathbb{F}_q^\times$ に対して $\mathrm{tr}A=\lambda+\lambda^{-1}$ を満たすとき、A の位数について次のことが成り立つ。

$$\mathrm{ord}(A)=\begin{cases}\mathrm{ord}(\lambda) & (\lambda\neq\pm1)\\ p & (\lambda=\pm1)\end{cases}$$

このことに留意すると次のような構成が可能になる。

まず $\nu=\mathrm{LCM}(\nu_1,\dots,\nu_k)$ として ν を割り切らない素数 p を取り t を乗法群 $\mathbb{Z}_\nu^\times$ における p の位数とする。(良く知られているように $\mathbb{Z}_\nu^\times$ は位数 $\varphi(\nu)$ の巡回群である。ここに $\varphi(n)$ は Euler 函数である。すなわち n の素因数分解を $p_1^{s_1}\dots p_l^{s_l}$ としたとき、$\varphi(n)=\varphi(p_1^{s_1})\dots\varphi(p_l^{s_l})$ であり各素数 p について $\varphi(p^s)=p^s-p^{s-1}$ である。) そこで $q=p^t$ を位数とする有限体 $\mathbb{F}_q$ を考える。取り方から $q\equiv1\ (\mathrm{mod}\,\nu)$ であり、$\mathbb{F}_q^\times$ は位数 $q-1$ の巡回群であるから特に $\mathbb{F}_q^\times$ の元 α_j で位数 ν_j となるものがある。そこで $\sigma,\tau,\omega\in\mathbb{F}_q$ に対して (これらは後から選ぶ),

$$A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \sigma\\ 0 & \alpha_1^{-1}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}\alpha_2+\tau & 1\\ \omega & \alpha_2^{-1}-\tau\end{pmatrix}$$

$$A_j=\begin{pmatrix}\alpha_j & 0\\ 0 & \alpha_j^{-1}\end{pmatrix}\quad(j=3,\dots,k-1)$$

と定める。$A_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ であるためには $\omega = \tau(\alpha_2^{-1} - \alpha_2 - \tau)$ でなければならないが、今 τ は $\tau \neq 0, \alpha_2^{-1} - \alpha_2$ となるように選んでおくと、$\omega \neq 0$ となる。すると $A_j \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ であることが分かり、$\mathrm{tr}A_j = \alpha_j + \alpha_j^{-1}$ だから上の補題によりこれらの位数は ν_j である。そこでこれらに対して $A = A_1A_2 \ldots A_{k-1}$ が位数 ν_k を持つようにすることが出来れば有限群 G として $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ の部分群 $\langle A_1, \ldots, A_{k-1} \rangle$ が採用できることになる。それには再び上の補題から $\mathrm{tr}A = \alpha_k + \alpha_k^{-1}$ を満たすように出来ればよい。面倒なので $\alpha = \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1}$ とおけば

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sigma \\ 0 & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha_2 + \tau) & \alpha^{-1} \\ \alpha\omega & \alpha^{-1}(\alpha_2^{-1} - \tau) \end{pmatrix}$$

だから、$\mathrm{tr}A = \alpha\omega\sigma + \alpha\alpha_1(\alpha_2 + \tau) + \alpha^{-1}\alpha_1^{-1}(\alpha_2^{-1} - \tau)$ となる。選び方から $\alpha\omega \neq 0$ だったから σ を適当に取って $\mathrm{tr}A = \alpha_k + \alpha_k^{-1}$ とすることが実際に出来る。よって定理3の主張4.が証明された。

Remark. 同様の構成が $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_q)$ においても可能である。その場合は位数に関して若干の差が出てくる。どっちが有利かは微妙なところであろう。

なお、多くの著者はこのように一般の個数の分岐点を持つ場合ではなく、それを3点で分岐した orbifold の場合に帰着させて議論している。$(0; p, q, r; 0; 0)$ の形の signature を持つ Fuchs 群 $\Gamma_{p,q,r}$ は（Schwarz の）三角群 (triangle group) と呼ばれており、rigidity があることが知られていて p, q, r のみによって (Möbius 変換による共役を除いて) 一意的に定まる。Schwarz はその研究において三角群と Gauss の超幾何函数との関係について論じている。この三角群について最も興味深く、またそれ自身深い内容を持っているクラスとしてはこの p, q, r が相異なる素数である場合である。$\Gamma_{p,q,r}$ の極大な torsion-free 指数有限正規部分群 N に対して $G = \Gamma_{p,q,r}/N$ は有限単純群となる。実際、G は生成元 a, b, c で $\mathrm{ord}(a) = p, \mathrm{ord}(b) = q, \mathrm{ord}(c) = r$ かつ関係式 $abc = 1$ を満たすものを持つが、ここで G が単位群以外の正規部分群 K を持っていたとする。標準射影 $\pi : G \to G/K$ を考えると、まず N の極大性から π は a, b, c の位数を保たない。つまり、どれか一つ、例えば c の像の位数は r ではない。r は素数だから従って $\pi(r) = 1$ となる。よって G/K は $\alpha = \pi(a), \beta = \pi(b)$ によって生成されるが、実はこのとき $\alpha\beta = 1$ だから α, β の位数は等しくなってしまう。元々 a, b は異なる素数位数を持っていたわけだからこれは $\alpha = \beta = 1$ でなければ起こり得ない。つまり $K = G$ でなければならない。これは G が自明でない正規部分群を含まないことを意味し、従って単純群であることが示された。このようにして得られる有限単純群はその多くが Lie 型と呼ばれる有限線型群に近いものだと思われるが、例外型の有限単純群もこのような群として登場することが分かってきている。しかも、多くの場合 $r = 2$ に選べるようである。これについては2節で挙げておいた文献などを参照して頂きたい。

References

[1] M. A. Albar and W. M. Al-Hamdan. The triangle groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, Vol. 89, pp. 103–111, 1993.

[2] R. C. Alperin. An elementary account of Selberg's lemma. *Enseig. Math.*, Vol. 33, pp. 269–273, 1987.

[3] G. Belyi. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Math. USSR Izv.*, Vol. 14, pp. 247–256, 1980.

[4] S. A. Broughton. Simple group actions on hyperbolic Riemann surfaces of least area. *Pacific J. Math.*, Vol. 158, pp. 23–48, 1993.

[5] S. Bundgaard and J. Nielsen. On normal subgroups with finite index in F-groups. *Mat. Tidsskrift B*, pp. 61–65, 1952.

[6] P. B. Cohen, C. Itzykson, and J. Wolfart. Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins, variations on a thema of Belyi. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 163, pp. 605–627, 1994.

[7] M. Conder. The genus of compact Riemann surfaces with maximal automorphism group. *J. Algebra*, Vol. 108, pp. 204–247, 1987.

[8] M. Edjvet. On certain quotients of the triangle groups. *J. Algebra*, Vol. 169, pp. 367–391, 1994.

[9] A. L. Edmonds, J. H. Ewing, and R. S. Kulkarni. Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tessellations of surfaces. *Invent. Math.*, Vol. 69, pp. 331–346, 1982.

[10] B. Everitt. Alternating quotients of the $(3, q, r)$ triangle groups. *Comm. Alg.*, Vol. 25, pp. 1817–1832, 1997.

[11] R. D. Feuer. Torsion-free subgroups of triangle groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 235–240, 1971.

[12] R. H. Fox. On Fenchel's conjecture about F-groups. *Mat. Tidsskrift B*, pp. 61–65, 1952.

[13] H. Glover and D. Sjerve. The genus of $PSl_2(q)$. *J. reine angev. Math.*, Vol. 380, pp. 59–86, 1987.

[14] G. A. Jones and D. Singerman. Theory of maps on orientable surfaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 37, pp. 273–307, 1978.

[15] 河野俊丈. 曲面の幾何構造とモジュライ. 日本評論社, 1997.

[16] R. S. Kulkarni. Normal subgroups of Fuchsian groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, Vol. 36, pp. 325–344, 1985.

[17] C. Maclachlan. Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 15, pp. 699–712, 1965.

[18] C. Maclachlan. Maximal normal Fuchsian groups. *Illinois J. Math.*, Vol. 15, pp. 104–113, 1971.

[19] G. Malle. Hurwitz groups and $G_2(q)$. *Canad. Math. Bull.*, Vol. 33, pp. 349–357, 1990.

[20] C. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization.* Ann. of Math. Studies, Princeton, 1994.

[21] J. Mennicke. Eine Bemerkung über Fuchssche Gruppen. *Invent. Math.*, Vol. 2, pp. 301–305; ibid. **6** (1968), 106, 1967.

[22] A. Selberg. On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces. In *Contribution to Function Theory*, pp. 147–164, Tata, 1960.

[23] 谷口雅彦, 松崎克彦. 双曲的多様体とクライン群. 日本評論社, 1993.

[24] A. J. Woldar. On Hurwitz generation and genus actions of sporadic groups. *Ill. J. Math.*, Vol. 33, pp. 416–437, 1989.